Complexe et géométrie

Exercice 1 (Application facile)

1 Soit F une transformation du plan définie par son écriture complexe.
Pour chacun des cas suivants ,déterminer la nature et les éléments caractéristiques de F:

a) $z^{'} = z - 1 + 2i$

b) $z^{'} = \frac{3}{2}z + 1 - i$

c) $z^{'} = \left(\sqrt{3} - 1\right) z + 1 + i\sqrt{3}$

d) $z^{'} = \left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - 2i$

e) $z^{'} = \left(2 + 2\sqrt{3}i\right) z - 7 - i$

2 Soit H l'homothétie de centre $A(i)$ et de rapport -4, et R la rotation de centre $B(2)$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.On désigne par T la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations suivantes : HoT ; HoR ; $HoToR$

3 Le plan complexe $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$. Soit F l'application définie de $\mathcal{P}$ dans lui même qui , à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ telle que : $z' = u^2z + u - 1$ ou $u \in \mathbb{C}$

a) Déterminer E_1 l'ensemble des valeurs u pour lesquelles F est une translation .

b) Déterminer E_2 l'ensemble des valeurs u pour lesquelles F est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

c) Déterminer E_3 l'ensemble des valeurs u pour lesquelles F est une homothétie de rapport -2 .

d) on pose $u = 1 - i$.Montrer que l'application F est une composée d'une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'une homothétie de rapport -2 et qui ont un centre commun Ω que l'on déterminera .

Exercice 2 (Moyen)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$. Soit θ un paramètre réel dans $[0, 2\pi[$ et on considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E) : z^2 - (1 + e^{i\theta})(1 + i)z + (1 + e^{2i\theta})i = 0$$

1 a) Déterminer une racine carrée de $-2\left(1 - e^{i\theta}\right)^2 i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

2 Notons z_1 et z_2 les solutions de (E) et posons $Z = \frac{z_1 + z_2}{2}$, et soient M_1,M_2 et M les points d'affixes respectives z_1 ; z_2 ; Z

(a) Écrire z_1 ; z_2 et Z sous la forme exponentielle

(b) Montrer que les points O , M_1 , M_2 , M sont alignés

(c) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles $OM_1 = OM_2$

$\boxed{3}$ (a) Déterminer l'écriture complexe de la transformation $r \circ h \circ t$ ou t et la translation de vecteur d'affixe 1 , h est l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et r est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$

(b) Quel est l'ensemble décrit par le point M lorsque θ décrit l'intervalle $[0, 2\pi[$

Résumé

Soient a et b deux nombres complexes tels que $a \neq 0$.
Soit T la transformation du plan d'écriture complexe $z' = az + b$

- Si $a = 1$, alors T est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.
- Si $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$, alors T est l'homothétie H de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ et de rapport a.
- Si $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| = 1$, alors T est la rotation R de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $arg(a)$.
- Si $a \notin \mathbb{R}$ et $|a| \neq 1$, alors T est la composée de la rotation R de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ et d'angle $arg(a)$. et l'homothétie H de centre $\Omega\left(\dfrac{b}{1-a}\right)$ et de rapport $|a|$.
  Dans ce cas, on a : $T = R \circ H = H \circ R$.